מס' מחברת ________________________ מס' ת.ז ________________________

מודלים חישוביים - מבחן מועד א', סמסטר א' תשע"ו (2016)

מרצה: פרופ' בני שור

מתרגלים: אורית מוסקוביץ' וגל רותם

20.1.2016

הנחיות:

1. מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה: שלוש שעות.
3. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. יש לענות על כל השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה).
   מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטא בלבד.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז ומספר מחברת.
6. במבחן יש 5 שאלות פתוחות:
   - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
   - במידה ואינכם יודעים תשובה לסעיף, ניתן לענות "אינני יודע/ת" **ולא להוסיף שום הסבר**. על סעיף זה יינתנו 20% מהנקודות.
   - יש לענות תשובות ברורות, ענייניות, תמציתיות וקריאות.
   - תשובות שיחרגו משמעותית מהמקום המוקצב או שיהיו לא קריאות עלולות לגרום להורדת נקודות.
   - מספר הנקודות המוקצות לסעיף מסויים אינו מעיד בהכרח על קושי הפתרון של אותו סעיף.
7. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול או בתרגיל בית) בתנאי שמצטטים אותה במדויק.
   טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בהרצאות מהסמסטר הקודם, וכו') יש להוכיח.
8. אלא אם נאמר אחרת, הניחו כי $P \neq NP$, $NP \neq CoNP$, וכן $\Sigma = \{0,1\}$.

בהצלחה, וחופש נעים!

1	2	3	4	5	סה"כ

מס' מחברת ________________________   מס' ת.ז ________________________

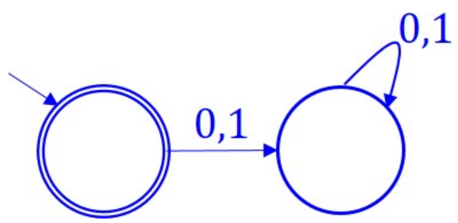
1. (10 נקודות)

הוכיחו / הפריכו:

לכל NFA N המכיל מצב אחד בלבד, קיים DFA D המכיל מצב אחד בלבד השקול לו ($L(N) = L(D)$).

נפריך- עבור ה־NFA הבא:

נקבל שה־DFA המינימלי השקול לו חייב להכיל שני מצבים (יש שתי מחלקות שקילות לשפה):



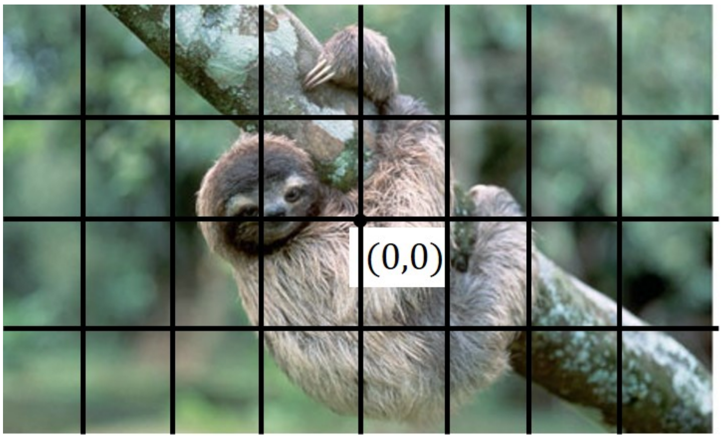
2. (20 נקודות)

נתבונן בשפה הבאה, מעל הא"ב $\Sigma = \{U, D, L, R\}$.

עצלנאי (sloth) הוא יונק החי על מערכת הצירים x, y (x, y שלמים, ויכולים להיות שליליים).

העצלנאי מתחיל את חייו בנקודה $(0,0)$, ומנהל אותם על פי מחרוזת $s \in \Sigma^*$, באופן הבא: בכל יום, קורא העצלנאי אות נוספת מ־s, ונע על פיה (U ־ למעלה, D ־ למטה, R ־ ימינה, L ־ שמאלה).

למשל עבור $s = DRR$ העצלנאי יסיים את חייו בנקודה $(2, -1)$.



איור 1: עצלנאי (sloth) במקום הולדתו

נגדיר את השפה:

$$\text{Home} = \{s \in \Sigma^* \mid \text{העצלנאי יסיים את חייו במקום הולדתו}\}$$

א. (5 נקודות)

הוכיחו כי Home היא חיתוך של שתי שפות חסרות הקשר.

$L_1 = \{s \in \Sigma^* \mid \#_U(s) = \#_D(s)\}$, $L_2 = \{s \in \Sigma^* \mid \#_L(s) = \#_R(s)\}$

כלומר, L_1 מכילה את כל המחרוזות בהן מספר הצעדים למעלה שווה למספר הצעדים למטה ו־L_2 מכילה את כל המחרוזות בהן מספר הצעדים שמאלה שווה למספר הצעדים ימינה. ראינו כי L_1, L_2 שפות ח"ה. ונקבל: $\text{Home} = L_1 \cap L_2$.

ב. (15 נקודות)

הוכיחו כי Home אינה חסרת הקשר.

נניח כי Home ח"ה, אז מסגירות של שפות ח"ה תחת חיתוך עם שפות רגולריות נקבל כי $\text{Home} \cap R^*D^*L^*U^* = \{R^nD^mL^nU^m \mid n, m \geq 0\}$ ח"ה. וראינו בכיתה כי שפה זו אינה ח"ה.

3. (30 נקודות)

נגדיר את השפה:

$$L_{SAT} = \{\langle M\rangle \mid \text{מ"ט דטרמיניסטית המכריעה את } SAT \text{ בזמן פולינומיאלי } M\}$$

א. (10 נקודות)

תחת ההנחה כי $\boldsymbol{P \neq NP}$, קבעו לאיזו מבין המחלקות הבאות שייכת השפה L_{SAT} והוכיחו את טענתכם.

(א) $L_{SAT} \in R$.

(ב) $L_{SAT} \in RE \setminus R$.

(ג) $L_{SAT} \in CoRE \setminus R$.

(ד) $L_{SAT} \notin RE \cup CoRE$.

$L \in R$.

אם $P \neq NP$, לא קיימת מ"ט דטרמיניסטית המכריעה את SAT בזמן פולינומיאלי, לכן $L = \emptyset$.

ב. (5 נקודות)

תחת ההנחה כי $\boldsymbol{P = NP}$, האם ניתן להשתמש במשפט Rice כדי להוכיח כי $L_{SAT} \notin R$?

לא.

תחת ההנחה, יש מ"ט M_1 דטרמיניסטית המכריעה את SAT בזמן פול'.
ללא שום הנחה, יש מ"ט M_2 המכריעה את SAT בזמן לא פול'.

$\langle M_1\rangle \in L_{SAT}$, $\langle M_2\rangle \notin L_{SAT}$, אבל $L(M_1) = L(M_2)$ ולכן תנאי משפט רייס לא מתקיימים.

ג. (15 נקודות)

תחת ההנחה כי $\boldsymbol{P = NP}$, קבעו לאיזו מבין המחלקות הבאות שייכת השפה L_{SAT} והוכיחו את טענתכם.

(א) $L_{SAT} \in R$.

(ב) $L_{SAT} \in RE \setminus R$.

(ג) $L_{SAT} \in CoRE \setminus R$.

(ד) $L_{SAT} \notin RE \cup CoRE$.

תהי M_{SAT} מ"ט המכריעה את SAT בזמן פולינומיאלי (קיימת כזו, לפי הנחת $P = NP$).

1) נראה רדוקציה מ־ H_{TM}.

Mapping Reduction f from H_{TM} to L

On input $\langle M, w\rangle$

(a) Construct a TM M':
  M' = "On input x:
  1. Run M on w
  2. Run M_{SAT} on x
  3. If M_{SAT} accepts, accept; Otherwise, reject"

(b) Return $\langle M'\rangle$

נכונות:

- אם $\langle M, w\rangle \in H_{TM}$, אז M עוצרת על w בזמן קבוע כלשהו (שאינו תלוי ב־x). במקרה זה נקבל ש־
  $L(M') = L(M_{SAT}) = SAT$.
  כמו כן המכונה M' רצה בזמן פולינומיאלי באורך הקלט x.
  לכן $f(\langle M, w\rangle) = \langle M'\rangle \in L$.
- אם $\langle M, w\rangle \notin H_{TM}$, אז M לא עוצרת על w
  ולכן M' לא עוצרת על אף x, ונקבל ש־$L(M') = \emptyset$.
  לכן $f(\langle M, w\rangle) = \langle M'\rangle \notin L$.

2) נראה רדוקציה מ־ $\overline{H_{TM}}$.

Mapping Reduction f from $\overline{H_{TM}}$ to L

On input $\langle M, w\rangle$

(a) Construct a TM M':

M' = "On input x:

1. Run M on w for $|x|$ steps. If M halts, accept x.
2. Run M_{SAT} on x
3. If M_{SAT} accepts, accept; Otherwise, reject"

(b) Return $\langle M'\rangle$

נכונות:

- אם $\langle M, w\rangle \in \overline{H_{TM}}$, אז M לא עוצרת על w ונקבל ש־ $L(M') = L(M_{SAT}) = SAT$, . כמו כן, המכונה M' רצה בזמן פולינומיאלי באורך הקלט x (זאת כיוון ש־M רצה על w בשלב 1 בדיוק $|x|$ צעדים)
  לכן $f(\langle M, w\rangle) = \langle M'\rangle \in L$.
- אם $\langle M, w\rangle \notin \overline{H_{TM}}$, אז M עוצרת על w תוך t צעדים.
  ולכן M' מקבלת כל מילה x שאורכה גדול מ־t ולכן $L(M') \neq SAT$.
  לכן $f(\langle M, w\rangle) = \langle M'\rangle \notin L$.

4. (25 נקודות)

א. (15 נקודות)

בהנתן שפה $A \subseteq \{0,1\}^*$ נגדיר את הפונקציה $f_A : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \cup \{\infty\}$ (שימו לב כי ∞ הוא תו):

$$f_A(\langle M\rangle) = \begin{cases} |A \cup L(M)| & \text{אם גודל האיחוד סופי} \\ \infty & \text{אם גודל האיחוד אינסופי} \end{cases}$$

הראו כי לכל שפה **סופית** A, אם f_A ניתנת לחישוב, אז השפה $L_{inf} = \{\langle M\rangle \mid \text{היא אינסופית } L(M)\}$ היא כריעה.

נניח כי f_A חשיבה, ונבנה מ"ט M_{inf} שתכריע את $L_{inf} = \{\langle M\rangle \mid L(M) \text{ is infinite}\}$:

M_{inf}

On input $\langle M\rangle$

(a) Run $f_A(\langle M\rangle)$

(b) If the answer is '∞', accept; Otherwise, reject

הוכחת הנכונות פשוטה ומושמטת מסעיף זה.

ב. (10 נקודות)

בהנתן שפה $B \subseteq \{0,1\}^*$ נגדיר את הפונקציה $f_B : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:

$$f_B(\langle M \rangle) = |B \cup L(M)| \qquad \text{אם גודל האיחוד סופי}$$

בסעיף זה, אם גודל האיחוד אינסופי, f_B אינה מוגדרת. כלומר, החישוב $f_B(\langle M \rangle)$ לא מסתיים.

הראו כי לכל שפה **סופית** B, f_B אינה ניתנת לחישוב.

נניח כי f_A חשיבה, ונבנה מ"ט $M_{A_{TM}}$ שתכריע את A_{TM}.

A סופית, ולכן קיים $y \notin A$.

$M_{A_{TM}}$

On input $\langle M, w \rangle$

(a) Construct a TM M_1 s.t $L(M_1) = \emptyset$

(b) Construct a TM M_2:

M_2 = "On input x:

1. If $x \neq y$, reject
2. Run M on w
3. If M accepts, accept; If M rejects, reject"

(c) Run $f_A(\langle M_1 \rangle)$

(d) Run $f_A(\langle M_2 \rangle)$

(e) If $f_A(\langle M_2 \rangle) - f_A(\langle M_1 \rangle) = 1$, accept; Otherwise, reject

נכונות:

מתקיים $f_A(\langle M_1 \rangle) = |A|$ ו־ $f_A(\langle M_2 \rangle) = |A \cup L(M_2)|$.

כמו כן, $L(M_2) = \emptyset$ אם M לא מקבלת את w, ובמקרה זה $f_A(\langle M_2 \rangle) = |A|$

ו־ $L(M_2) = \{y\}$ אם M מקבלת את w, ובמקרה זה $f_A(\langle M_2 \rangle) = |A| + 1$.

5. (15 נקודות)

נגדיר: מעגל **כמעט המילטוני** בגרף מכוון G הוא מעגל שעובר דרך כל צמתי הגרף, בכל צומת פעם אחת בדיוק, למעט צומת אחד דרכו המעגל עובר בדיוק פעמיים.

נגדיר את השפה:

$$\text{Almost-Ham} = \{\langle G\rangle \mid \text{הוא גרף מכוון המכיל מעגל כמעט המילטוני } G\}$$

א. (5 נקודות)

הוכיחו כי $\text{Almost-Ham} \in NP$.

העד הוא המסלול הכמעט המילטוני, ובדיקתו לוקחת זמן פולינומיאלי.

ב. (10 נקודות)

הוכיחו כי Almost-Ham היא NP קשה. תארו רדוקציה והוכיחו את נכונותה.

נבנה רדוקציה מ־ $\text{Ham-Cycle} = \{\langle G\rangle \mid \text{הוא גרף מכוון המכיל מעגל המילטוני } G\}$.

עבור קלט $G = (V, E)$, נבנה את הגרף $G' = (V', E')$:

- $V' = V \cup \{u\}$
- $E' = E \cup \{(u, v), (v, u)\}$ כאשר v הוא קודקוד שרירותי בגרף.

במילים, נבחר קודקוד שרירותי בגרף, ונחבר אליו קודקוד חדש, ונוסיף קשתות בשני הכיוונים ביניהם.

נכונות:

- הרדוקציה פול'.
- אם קיים מעגל המילטוני C ב־G, קיים מעגל כמעט המילטוני ב־G':
המעגל C בתוספת מעבר פעמיים בקודקוד v ובקודקוד החדש u הוא מעגל כמעט המילטוני.
- אם ב־G' קיים מעגל כמעט המילטוני, הוא חייב לעבור פעמיים בקודקוד v על מנת להגיע לקודקוד u. לכן, אם נסיר את הקודקוד החדש, נקבל מעגל המילטוני ב־G.